

# Pelabelan Harmonis Ganjil pada Graf Kincir Angin *Double Quadrilateral*

Fery Firmansah, M. Wahid Syaifuddin

Prodi Pendidikan Matematika,  
Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan  
Universitas Widya Dharma Klaten  
Email : [feryfirmansah@unwidha.ac.id](mailto:feryfirmansah@unwidha.ac.id)

**Abstrak**—Graf harmonis ganjil adalah graf yang mempunyai sifat pelabelan harmonis ganjil. Pada makalah ini akan diberikan konstruksi kelas graf baru yaitu graf kincir angin *double quadrilateral* yang mempunyai sifat pelabelan harmonis ganjil sedemikian sehingga graf kincir angin *double quadrilateral* adalah graf harmonis ganjil.

**Kata kunci:** *double quadrilateral, graf kincir angin, pelabelan harmonis ganjil*

## I. PENDAHULUAN

Teori graf adalah bagian dari matematika kombinatorik yang banyak digunakan sebagai alat bantu untuk menyelesaikan suatu persoalan agar lebih mudah untuk diselesaikan. Graf digunakan untuk merepresentasikan objek-objek diskrit dan hubungan antara objek-objek diskrit tersebut. Representasi visual dari graf adalah dengan menyatakan objek diskrit sebagai titik atau simpul (*vertex*) dan hubungan antara objek diskrit sebagai garis atau busur (*edge*). Pelabelan graf diperkenalkan oleh Sedlacek pada tahun 1964, sampai tahun 2015 telah ditemukan banyak hasil riset dari pelabelan graf yang dikumpulkan dan diperbaharui secara teratur oleh Gallian. Gallian [6] telah merangkum kurang lebih 2000 jurnal dari seluruh peneliti dunia dan kurang lebih sudah ditemukan 200 kelas graf baru beserta pelabelannya. Pelabelan graf dapat diaplikasikan dalam berbagai bidang keilmuan diantaranya teori koding, radar, desain sirkuit, manajemen data base, *secret sharing message* dan kriptografi.

Jenis pelabelan graf yang dapat digunakan untuk melabel suatu graf, antara lain pelabelan jumlah, pelabelan jumlah eksklusif, pelabelan ajaib, pelabelan anti ajaib, pelabelan *graceful*, pelabelan harmonis, pelabelan harmonis genap dan pelabelan harmonis ganjil. Pelabelan pada suatu graf adalah pemetaan dari setiap elemen graf ke bilangan bulat positif. Bilangan bulat positif tersebut dinamakan label. Elemen-elemen graf yang dipetakan bisa berupa himpunan simpul, himpunan busur atau kombinasinya. Jika domain dari fungsi tersebut adalah himpunan simpul maka disebut pelabelan simpul dan jika domain dari fungsi tersebut adalah himpunan busur maka disebut pelabelan busur. Sedangkan jika domain dari fungsi tersebut adalah himpunan simpul dan himpunan busur maka disebut pelabelan total [3].

Pada makalah ini pembahasan dibatasi untuk graf sederhana, berhingga dan tidak berarah. Pelabelan harmonis ganjil diperkenalkan oleh Liang dan Bai [8] dengan definisi sebagai berikut Graf  $G = (V, E)$  dengan  $V(G)$  himpunan simpul dan  $E(G)$  himpunan busur dikatakan sebagai graf  $G(p, q)$  jika memenuhi  $p = |V(G)|$  simpul dan  $q = |E(G)|$  busur. Graf  $G(p, q)$  dikatakan graf harmonis ganjil jika terdapat fungsi injektif  $f: V(G) \rightarrow \{0, 1, 2, \dots, 2q - 1\}$  sedemikian sehingga menginduksi fungsi  $f^*: E(G) \rightarrow \{1, 3, 5, \dots, 2q - 1\}$  yang bersifat bijektif, yang didefinisikan oleh  $f^*(uv) = f(u) + f(v)$  dan fungsi  $f$  dikatakan fungsi pelabelan harmonis ganjil dari graf  $G(p, q)$ . Liang dan Bai [8] telah menunjukkan sifat-sifat graf yang mempunyai pelabelan harmonis ganjil diantaranya jika  $G$  adalah graf harmonis ganjil maka  $G$  adalah graf bipartit dan jika graf  $G(p, q)$  adalah graf harmonis ganjil maka  $2\sqrt{q} \leq p \leq 2q - 1$ .

Hasil penelitian yang relevan dengan makalah ini antara lain. Vaidya dan Shah [10] membuktikan bahwa graf shadow dan graf split dari graf lintasan  $P_n$  dan graf bintang  $K_{1,n}$  adalah graf harmonis ganjil. Saputri, Sugeng dan Froncek [9] membuktikan bahwa graf dumbel  $D_{n,k,2}$ ,  $n \equiv k \equiv 0 \pmod{4}$  dan  $n \equiv k \equiv 2 \pmod{4}$  dan graf  $C_n \odot K_1$ ,  $n \equiv 0 \pmod{4}$  adalah graf harmonis ganjil dan graf  $C_n \times P_m$  adalah

graf harmonis ganjil jika dan hanya jika  $n \equiv 0 \pmod{4}$ . Abdel-Aal [1] graf yang dibentuk dari dua copy graf lingkaran  $C_n$  genap dengan satu busur persekutuan, dua copy graf lingkaran  $C_n$ ,  $n \equiv 0 \pmod{4}$  dengan satu simpul persekutuan adalah graf harmonis ganjil. Alyani, Firmansah, Giyarti dan Sugeng [2] membuktikan bahwa graf ular  $kC_4$  dengan  $k \geq 1$  graf ular  $kC_8$  dengan  $k \geq 1$  dan graf gelang  $C_4^{+(1,k)}$  dengan  $k \geq 1$  adalah graf harmonis ganjil. Firmansah dan Sugeng [4] membuktikan bahwa graf kincir angin belanda  $C_4^{(k)}$  dengan  $k \geq 1$  dan gabungan graf kincir angin belanda  $C_4^{(k)} \cup C_4^{(k)}$  dengan  $k \geq 1$  adalah graf harmonis ganjil. Firmansah [5] membuktikan bahwa gabungan graf ular  $kC_4 \cup kC_4$  dengan  $k \geq 1$  dan graf ular berlipat  $kC_4(r)$  dengan  $k \geq 1$  dan  $r \geq 1$  adalah graf harmonis ganjil.

Pada makalah ini penulis akan memberikan konstruksi graf kincir angin *double quadrilateral*  $DQ^{(k)}$  dengan  $k \geq 1$ . Selanjutnya penulis akan menunjukkan bahwa graf kincir angin *double quadrilateral*  $DQ^{(k)}$  dengan  $k \geq 1$  memenuhi fungsi pelabelan harmonis ganjil sedemikian sehingga graf kincir angin *double quadrilateral*  $DQ^{(k)}$  dengan  $k \geq 1$  adalah graf harmonis ganjil.

## II. METODE PENELITIAN

Metode penelitian yang digunakan adalah studi literatur dengan mempelajari makalah dan buku yang berkaitan dengan topik penelitian. Selanjutnya hasil studi literatur tersebut digunakan sebagai landasan teori untuk mendapatkan konstruksi pelabelan harmonis ganjil pada graf  $G$ . Berikut diberikan langkah-langkah yang dilakukan untuk mendapatkan konstruksi pelabelan harmonis ganjil pada graf  $G$ .

1. Mengkaji sifat-sifat khusus dari graf  $G$  yang bertujuan untuk mendapatkan konstruksi, definisi dan notasi simpul dari graf  $G$ ;
2. Memformulasikan fungsi pelabelan simpul dan pelabelan busur menjadi suatu rumus konstruksi pelabelan harmonis ganjil yang berlaku secara umum untuk graf  $G$ ;
3. Mengkonstruksi hasil yang diperoleh dalam bentuk teorema disertai dengan buktinya secara matematis.

## III. HASIL DAN PEMBAHASAN

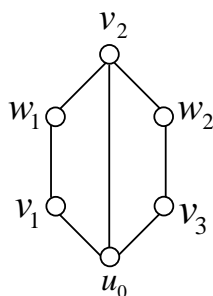
Pada bagian awal diberikan definisi dan konstruksi dari graf *double quadrilateral*  $DQ$  yang diperoleh dari dua graf lingkaran  $C_4$  dengan satu busur persekutuan. Selanjutnya definisi dari graf *double quadrilateral*  $DQ$  tersebut digunakan untuk membentuk definisi dan konstruksi dari graf kincir angin *double quadrilateral*  $DQ^{(k)}$  dengan  $k \geq 1$ . Pada bagian akhir akan ditunjukkan bahwa graf kincir angin *double quadrilateral*  $DQ^{(k)}$  dengan  $k \geq 1$  memenuhi fungsi pelabelan harmonis ganjil sedemikian sehingga graf kincir angin *double quadrilateral*  $DQ^{(k)}$  dengan  $k \geq 1$  adalah graf harmonis ganjil.

### A. Definisi dan Konstruksi dari Graf Double Quadrilateral

Berikut diberikan definisi dari graf *double quadrilateral*  $DQ$ , selanjutnya diberikan konstruksi dan notasi simpul dari graf *double quadrilateral*  $DQ$ .

**Definisi 1.** [6] *Graf double quadrilateral*  $DQ$  adalah graf yang dibentuk dari dua graf lingkaran  $C_4$  dengan himpunan simpul masing-masing adalah  $\{u_0, v_1, v_2, w_1\}$  dan  $\{u_0, v_2, v_3, w_2\}$  yang terhubung dengan satu busur persekutuan  $u_0v_2$ .

Berikut diberikan konstruksi, notasi simpul dan notasi busur dari graf *double quadrilateral*  $DQ$  pada Gambar 1.



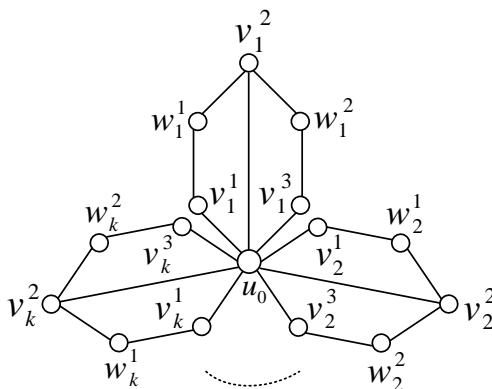
GAMBAR 1. KONTRUKSI DARI GRAF *DOUBLE QUADRILATERAL*

**B. Definisi dan Kontruksi dari Graf Kincir Angin Double Quadrilateral**

Berikut diberikan definisi, kontruksi dan notasi simpul graf kincir angin *double quadrilateral*  $DQ^{(k)}$  dengan  $k \geq 1$ , selanjutnya didefinisikan himpunan simpul dan himpunan busur dari graf kincir angin *double quadrilateral*  $DQ^{(k)}$  dengan  $k \geq 1$ .

**Definisi 2.** Graf kincir angin *double quadrilateral*  $DQ^{(k)}$  dengan  $k \geq 1$  adalah graf yang dibentuk dari  $k$  graf *double quadrilateral*  $DQ$  yang mempunyai satu simpul pusat persekutuan  $u_0$ .

Kontruksi dan notasi simpul dari graf kincir *double quadrilateral*  $DQ^{(k)}$  dengan  $k \geq 1$  diberikan pada Gambar 2 sebagai berikut:



GAMBAR 2. KONTRUKSI DARI GRAF KINCIR ANGIN *DOUBLE QUADRILATERAL*

Berdasarkan notasi simpul dan kontruksi pada Gambar 2 didefinisikan himpunan simpul dan himpunan busur dari graf kincir angin *double quadrilateral*  $DQ^{(k)}$  dengan  $k \geq 1$  adalah

$$V(DQ^{(k)}) = \{u_0\} \cup \{v_i^j \mid 1 \leq i \leq k, j = 1,2,3\} \cup \{w_i^j \mid 1 \leq i \leq k, j = 1,2\} \text{ dan}$$

$$E(DQ^{(k)}) = \{u_0 v_i^j \mid 1 \leq i \leq k, j = 1,2,3\} \cup \{v_i^{2j-1} w_i^j \mid 1 \leq i \leq k, j = 1,2\} \cup \{w_i^j v_i^{2j} \mid 1 \leq i \leq k, j = 1,2\}.$$

**C. Pelabelan harmonis ganjil pada graf kincir angin double quadrilateral**

Berikut diberikan sifat yang menyatakan bahwa graf kincir angin *double quadrilateral*  $DQ^{(k)}$  dengan  $k \geq 1$  memenuhi fungsi pelabelan harmonis ganjil sedemikian sehingga graf kincir angin *double quadrilateral*  $DQ^{(k)}$  dengan  $k \geq 1$  adalah graf harmonis ganjil, selanjutnya diberikan beberapa contoh untuk memperjelas sifat tersebut.

**Teorema 3.** Graf kincir angin *double quadrilateral*  $DQ^{(k)}$  dengan  $k \geq 1$  adalah graf harmonis ganjil.

**Bukti.** Misalkan  $DQ^{(k)}$  adalah graf kincir angin *double quadrilateral* dengan  $k \geq 1$ .

Himpunan simpul dan himpunan busur dari  $DQ^{(k)}$  dengan  $k \geq 1$  adalah  $V(DQ^{(k)}) = \{u_0\} \cup \{v_i^j \mid 1 \leq i \leq k, j = 1,2,3\} \cup \{w_i^j \mid 1 \leq i \leq k, j = 1,2\}$  dan

$E(DQ^{(k)}) = \{u_0 v_i^j | 1 \leq i \leq k, j = 1, 2, 3\} \cup \{v_i^{2j-1} w_i^j | 1 \leq i \leq k, j = 1, 2\} \cup \{w_i^j v_i^2 | 1 \leq i \leq k, j = 1, 2\}$  maka diperoleh  $p = |V(DQ^{(k)})| = 5k + 1$  dan  $q = |E(DQ^{(k)})| = 7k$ .

Definisikan fungsi pelabelan simpul  $f: V(DQ^{(k)}) \rightarrow \{0, 1, 2, 3, \dots, 14k - 1\}$  sebagai berikut:

$$f(u_0) = 0 \tag{1}$$

$$f(v_i^j) = 6i + 2j - 7, 1 \leq i \leq k, j = 1, 2, 3 \tag{2}$$

$$f(w_i^j) = 14k - 14i + 2j + 4, 1 \leq i \leq k, j = 1, 2 \tag{3}$$

berdasarkan fungsi pelabelan simpul  $f$  pada (1), (2), dan (3) diperoleh himpunan simpul setelah dilabel sebagai berikut:

$$\begin{aligned} f(V(DQ^{(k)})) &= \{0\} \cup \{1, 7, 13, \dots, 6k - 5, 3, 9, 15, \dots, 6k - 3, 5, 11, 17, \dots, 6k - 1\} \\ &\cup \{14k - 8, 14k - 22, 14k - 36, \dots, 20, 6, 14k - 6, 14k - 20, 14k - 34, \dots, 22, 8\} \\ &= \{0\} \cup \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, \dots, 6k - 5, 6k - 3, 6k - 1\} \\ &\cup \{6, 8, 20, 22, \dots, 14k - 36, 14k - 34, 14k - 22, 14k - 20, 14k - 8, 14k - 6\} \\ &= \{0, 1, 3, 5, 6, 7, 8, \dots, 6k - 3, 6k - 1, \dots, 14k - 8, 14k - 6\} \\ &= \{0, 1, 3, 5, \dots, 14k - 6\}. \end{aligned}$$

terlihat bahwa fungsi  $f$  memberikan label yang berbeda pada setiap simpul dan diperoleh  $f(V(DQ^{(k)})) = \{0, 1, 3, 5, \dots, 14k - 6\} \subseteq \{0, 1, 2, 3, \dots, 14k - 1\}$  sehingga fungsi pelabelan simpul  $f$  memenuhi pemetaan injektif.

Setelah menunjukkan fungsi pelabelan simpul  $f$  memenuhi pemetaan injektif, selanjutnya akan ditunjukkan bahwa fungsi pelabelan busur  $f^*$  memenuhi pemetaan bijektif. Didefinisikan fungsi pelabelan busur  $f^*: E(DQ^{(k)}) \rightarrow \{1, 3, 5, 7, \dots, 14k - 1\}$  sebagai berikut:

$$f^*(u_0 v_i^j) = 6i + 2j - 7, 1 \leq i \leq k, j = 1, 2, 3 \tag{4}$$

$$f^*(v_i^{2j-1} w_i^j) = 14k - 8i + 6j - 5, 1 \leq i \leq k, j = 1, 2 \tag{5}$$

$$f^*(w_i^j v_i^2) = 14k - 8i + 2j + 1, 1 \leq i \leq k, j = 1, 2 \tag{6}$$

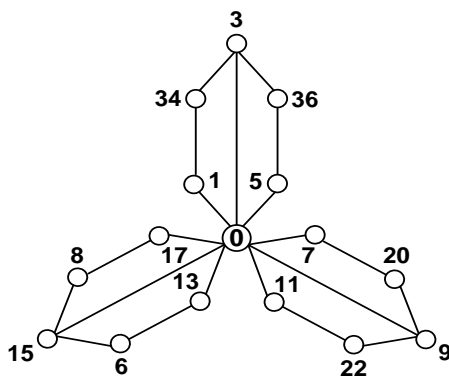
berdasarkan fungsi pelabelan busur  $f^*$  pada persamaan (4), (5), dan (6) diperoleh himpunan busur setelah dilabel sebagai berikut:

$$\begin{aligned} f^*(E(DQ^{(k)})) &= \{1, 7, 13, \dots, 6k - 5, 3, 9, 15, \dots, 6k - 3, 5, 11, 17, \dots, 6k - 1\} \\ &\cup \{14k - 7, 14k - 15, \dots, 6k + 9, 6k + 1, 14k - 1, 14k - 9, \dots, 6k + 15, 6k + 7\} \\ &\cup \{14k - 5, 14k - 13, \dots, 6k + 11, 6k + 3, 14k - 3, 14k - 11, \dots, 6k + 13, 6k + 5\} \\ &= \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, \dots, 6k - 5, 6k - 3, 6k - 1\} \\ &\cup \{6k + 1, 6k + 7, 6k + 13, \dots, 14k - 15, 14k - 9, 14k - 3, 14k - 1\} \\ &\cup \{6k + 3, 6k + 5, 6k + 11, 6k + 13, \dots, 14k - 13, 14k - 11, 14k - 5, 14k - 3\} \\ &= \{1, 3, 5, 7, 9, \dots, 6k - 1, 6k + 1, 6k + 3, 6k + 5, \dots, 14k - 5, 14k - 3, 14k - 1\} \\ &= \{1, 3, 5, 7, \dots, 14k - 1\} \end{aligned}$$

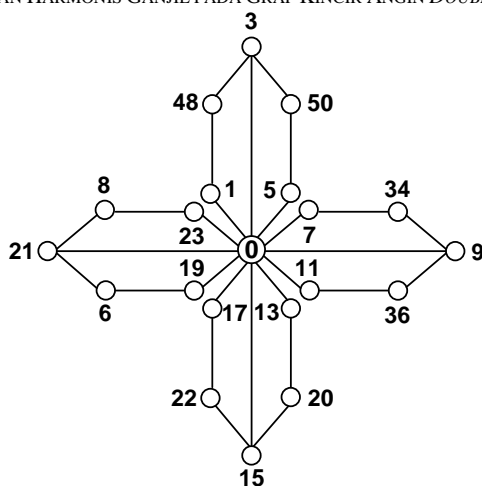
terlihat bahwa fungsi  $f^*$  memberikan label yang berbeda pada setiap busur dan diperoleh  $f^*(E(DQ^{(k)})) = \{1, 3, 5, 7, \dots, 14k - 1\}$  sehingga fungsi pelabelan busur  $f^*$  memenuhi pemetaan bijektif.

Telah ditunjukkan bahwa fungsi pelabelan simpul  $f$  memenuhi pemetaan injektif sedemikian sehingga menginduksi fungsi pelabelan busur  $f^*$  yang bijektif. Akibatnya graf kincir angin *double quadrilateral*  $DQ^{(k)}$  dengan  $k \geq 1$  adalah graf harmonis ganjil ■

**Contoh 4.** Diberikan contoh pelabelan harmonis ganjil dari graf kincir angin *double quadrilateral*  $DQ^{(3)}$  pada Gambar 3 dan  $DQ^{(4)}$  pada Gambar 4.



GAMBAR 3. PELABELAN HARMONIS GANJIL PADA GRAF KINCIR ANGIN *DOUBLE QUADRILATERAL*  $DQ^{(3)}$



GAMBAR 4. PELABELAN HARMONIS GANJIL PADA GRAF KINCIR ANGIN *DOUBLE QUADRILATERAL*  $DQ^{(4)}$

Dari Gambar 3 terlihat bahwa label busur pada graf kincir angin *double quadriateral*  $DQ^{(3)}$  membentuk himpunan bilangan ganjil  $f^*(E(DQ^{(3)})) = \{1,3,5,7, \dots, 39\}$  begitu juga pada Gambar 4 label busur pada graf kincir angin *double quadriateral*  $DQ^{(4)}$  membentuk himpunan bilangan ganjil  $f^*(E(DQ^{(4)})) = \{1,3,5,7, \dots, 53\}$ .

#### IV. SIMPULAN DAN SARAN

Pada makalah ini telah diberikan definisi dan konstruksi dari graf kincir angin *double quadriateral*  $DQ^{(k)}$  dengan  $k \geq 1$ . Selain hal tersebut juga telah diberikan konstruksi pelabelan harmonis ganjil pada graf kincir angin *double quadriateral*  $DQ^{(k)}$  dengan  $k \geq 1$  sedemikian sehingga graf kincir angin *double quadriateral*  $DQ^{(k)}$  dengan  $k \geq 1$  adalah graf harmonis ganjil. Saat ini penulis sedang memperluas kasus tersebut untuk kelas graf yang lain diantaranya adalah graf kincir angin variasi *double quadriateral*  $VDQ^{(k)}$  dengan  $k \geq 1$  sehingga memungkinkan untuk dilakukan penelitian lebih lanjut.

#### UCAPAN TERIMA KASIH

Penulis mengucapkan terimakasih kepada Lembaga Penelitian dan Pengabdian Masyarakat Universitas Widya Dharma Klaten atas dukungan secara *financial* terhadap penelitian ini.

#### DAFTAR PUSTAKA

- [1] Abdel-Aal, M. E. 2014. New Families of Odd Harmonious Graphs. *International Journal of Soft Computing, Mathematics and Control*, 3(1), 1-13.

- 
- [2] Alyani, F., Firmansah, F., Giyarti, W., dan Sugeng, K. A. 2013. The Odd Harmonious Labeling of  $kC_n$ -Snake Graphs for Specific Values of  $n$ , that is, for  $n = 4$  and  $n = 8$ . *IndoMS International Conference on Mathematics and Its Applications*, Diselenggarakan oleh Program Studi Matematika, UGM dan IndoMS, 6-7 November 2013 (hal. 225-230). Yogyakarta: Indonesian Mathematical Society.
- [3] Baca, M dan Miller, M. 2008. *Super Edge-Antimagic Graphs : A Wealth of Problems and Some Solution*. Florida : Brown Walker Press.
- [4] Firmansah, F., dan Sugeng, K. A. 2015. Pelabelan Harmonis Ganjil pada Graf Kincir Angin Belanda dan Gabungan Graf Kincir Angin Belanda. *Magistra*, No 94 Th. XXVII, ISSN 0215-9511, 56-92
- [5] Firmansah, F. 2016. Pelabelan Harmonis Ganjil pada Gabungan Graf Ular dan Graf Ular Berlipat. *Konferensi Nasional Matematika dan Pembelajarannya (KNPMP I)*, Diselenggarakan oleh Program Studi Pendidikan Matematika, UMS, 12 Maret 2016 Surakarta: Muhammadiyah University Press.
- [6] Gallian, J. A. 2015. A Dynamic Survey of Graph Labeling. *The Electronic Journal of Combinatorics*, 18. #DS6.
- [7] Harary, F. 1996. *Graph Theory*. Philippines : Addison-Wesley Publishing Company.
- [8] Liang, Z., dan Bai, Z. 2009. On The Odd Harmonious Graphs with Applications, *J. Appl. Math. Comput.*, 29, 105-116. doi:10.1007/s12190-008-0101-0
- [9] Saputri, G. A., Sugeng, K. A., dan Froncek, D. 2013. The Odd Harmonious Labeling of Dumbbell and Generalized Prims Graphs, *AKCE Int. J. Graphs Comb.*, 10(2), 221-228.
- [10] Vaidya, S. K., dan Shah, N. H. 2011. Some New Odd Harmonious Graphs. *International Journal of Mathematics and Soft Computing*, 1(1), 9-16.