ResearchGate

See discussions, stats, and author profiles for this publication at: https://www.researchgate.net/publication/291973154

PELABELAN HARMONIS GANJIL PADA GRAF KINCIR ANGIN BELANDA DAN GABUNGAN GRAF KINCIR ANGIN BELANDA

Article · December 2015

CITATION
1

READS
1,350

2 authors:

Fery Firmansah
Universitas Widya Dharma, Indonesia, Klaten
14 PUBLICATIONS **23** CITATIONS

SEE PROFILE

Kiki A. Sugeng
University of Indonesia
134 PUBLICATIONS **485** CITATIONS

SEE PROFILE

Some of the authors of this publication are also working on these related projects:

Project graph labeling View project

Project Dekomposisi H-(Anti) Ajaib dari Variasi Keluarga Graf View project

All content following this page was uploaded by Fery Firmansah on 27 January 2016.

The user has requested enhancement of the downloaded file.

PELABELAN HARMONIS GANJIL PADA GRAF KINCIR ANGIN BELANDA DAN GABUNGAN GRAF KINCIR ANGIN BELANDA

Fery Firmansah[1)], Kiki Ariyanti Sugeng[2)]

Abstrak : *Graf* $G=(V(G),E(G))$ *dengan* $V(G)$ *adalah himpunan simpul dan* $E(G)$ *adalah himpunan busur disebut sebagai graf* $G(p,q)$ *jika memiliki* $p=|V(G)|$ *simpul dan* $q=|E(G)|$ *busur. Graf* $G(p,q)$ *disebut graf harmonis ganjil jika terdapat fungsi* $f:V(G)\rightarrow\{0,1,2,...,2q-1\}$ *yang bersifat injektif sedemikian sehingga menginduksi suatu fungsi* $f^*:E(G)\rightarrow\{1,3,5,...,2q-1\}$ *yang bersifat bijektif, yang didefinisikan oleh* $f^*(uv)=f(u)+f(v)$ *dan fungsi f dikatakan fungsi pelabelan harmonis ganjil dari graf* $G(p,q)$. *Graf kincir angin belanda* $C_4^{(k)}$ *dengan* $k\geq 1$ *adalah graf yang dibentuk dari* k *graf lingkaran* C_4 *yang mempunyai satu simpul pusat persekutuan* v_0. *Graf* $C_4^{(k)}\cup C_4^{(k)}$ *dengan* $k\geq 1$ *adalah gabungan dua graf kincir angin belanda* $C_4^{(k)}$ *dengan* $k\geq 1$. *Pada makalah ini akan diberikan pelabelan harmonis ganjil pada graf kincir angin belanda* $C_4^{(k)}$ *dengan* $k\geq 1$ *dan gabungan graf kincir angin belanda* $C_4^{(k)}\cup C_4^{(k)}$ *dengan* $k\geq 1$ *sedemikian sehingga graf kincir angin belanda* $C_4^{(k)}$ *dengan* $k\geq 1$ *dan gabungan graf kincir angin belanda* $C_4^{(k)}\cup C_4^{(k)}$ *dengan* $k\geq 1$ *adalah graf harmonis ganjil.*

Kata Kunci : graf kincir angin belanda, gabungan graf kincir angin belanda, graf harmonis ganjil, pelabelan harmonis ganjil

PENDAHULUAN

Pelabelan graf pertama kali diperkenalkan oleh Sedlacek pada tahun 1963. Sampai tahun 2014 banyak hasil riset yang telah ditemukan dari pelabelan graf baik dalam hal teori maupun aplikasi dan hasil riset tersebut dikumpulkan oleh Gallian [3] dan terus diperbaharui secara teratur. Pelabelan graf dapat diaplikasikan dalam berbagai bidang keilmuan diantaranya pada teori koding, radar, astronomi, desain sirkuit, manajemen data base dan kriptografi [3]. Salah satu jenis pelabelan graf yang relatif masih baru adalah pelabelan harmonis ganjil yang diperkenalkan oleh Liang dan Bai [4] pada tahun 2009.

Pada makalah ini pembahasan dibatasi untuk graf sederhana, berhingga dan tidak berarah. Graf $G=(V(G),E(G))$ dengan $V(G)$ adalah himpunan simpul dan $E(G)$ adalah himpunan busur disebut sebagai graf $G(p,q)$ jika memiliki $p=|V(G)|$ simpul dan $q=|E(G)|$ busur. Graf $G(p,q)$ disebut graf harmonis ganjil jika terdapat fungsi $f:V(G)\rightarrow\{0,1,2,...,2q-1\}$ yang bersifat injektif sedemikian sehingga menginduksi suatu fungsi $f^*:E(G)\rightarrow\{1,3,5,...,2q-1\}$ yang bersifat bijektif, yang didefinisikan oleh $f^*(uv)=f(u)+f(v)$ dan fungsi *f* dikatakan fungsi pelabelan harmonis ganjil dari graf $G(p,q)$.

Liang dan Bai [4] telah menunjukkan sifat-sifat graf yang mempunyai pelabelan harmonis ganjil diantaranya jika G adalah graf harmonis ganjil maka G adalah bipartit dan jika graf $G(p,q)$ adalah graf

[1]*Progdi Pend. Matematika FKIP, UNWIDHA Klaten*

[2]*Departemen Matematika, FMIPA Universitas Indonesia, Depok*

ISSN 0215-9511

harmonis ganjil maka $2\sqrt{q} \le p \le 2q-1$. Liang dan Bai [4] juga telah membuktikan bahwa graf lingkaran C_n adalah graf harmonis ganjil jika dan hanya jika $n \equiv 0(\bmod 4)$, graf komplit K_n adalah graf harmonis ganjil jika dan hanya jika $n = 2$, graf komplit k-partit $K(n_1, n_2 ..., n_k)$ adalah graf harmonis ganjil jika dan hanya jika $k = 2$, graf kincir angin K_n^t adalah graf harmonis ganjil jika dan hanya jika $n = 2$.

Vaidya dan Shah [6] membuktikan bahwa graf shadow dan graf split dari graf lintasan P_n dan graf bintang $K_{1,n}$ adalah graf harmonis ganjil. Saputri, Sugeng dan Froncek [5] membuktikan bahwa graf dumbel $D_{n,k,2}, n \equiv k \equiv 0(\bmod 4)$ dan $n \equiv k \equiv 2(\bmod 4)$ dan graf $C_n \Theta K_1, n \equiv 0(\bmod 4)$ adalah graf harmonis ganjil, graf $C_n \times P_m$ adalah graf harmonis ganjil jika dan hanya jika $n \equiv 0(\bmod 4)$. Alyani, Firmansah, Giyarti dan Sugeng [2] membuktikan bahwa graf ular kC_4 dengan $k \ge 1$, graf ular kC_8 dengan dan graf gelang $C_4^{+(1,k)}$ dengan $k \ge 1$ adalah graf harmonis ganjil. Abdel-Aal [1] membuktikan bahwa graf yang dibentuk dari dua copy graf lingkaran C_n genap dengan satu busur persekutuan, dua copy graf lingkaran C_n $n \equiv 0(\bmod 4)$ dengan satu simpul persekutuan adalah graf harmonis ganjil.

Pada makalah ini akan ditunjukan bahwa graf kincir angin belanda $C_4^{(k)}$ dengan $k \ge 1$ dan gabungan graf kincir angin belanda $C_4^{(k)} \cup C_4^{(k)}$ dengan $k \ge 1$ memenuhi fungsi pelabelan harmonis ganjil sedemikian sehingga graf kincir angin belanda $C_4^{(k)}$ dengan $k \ge 1$ dan gabungan graf kincir angin belanda $C_4^{(k)} \cup C_4^{(k)}$ dengan $k \ge 1$ adalah graf harmonis ganjil.

METODE PENELITIAN

Metode penelitian yang digunakan adalah studi literatur dengan mempelajari makalah dan buku yang berkaitan dengan topik penelitian. Selanjutnya hasil studi literatur tersebut digunakan sebagai landasan teori untuk mendapatkan pelabelan harmonis ganjil pada graf kincir angin belanda $C_4^{(k)}$ dengan $k \ge 1$ dan gabungan graf kincir angin belanda $C_4^{(k)} \cup C_4^{(k)}$ dengan $k \ge 1$.

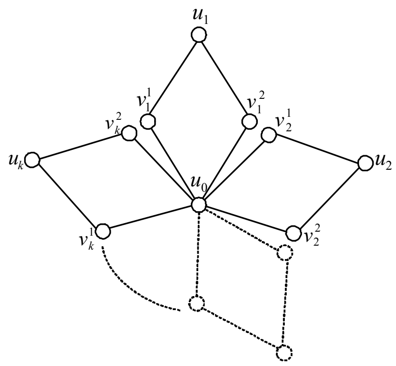
HASIL DAN PEMBAHASAN

1. Definisi dan Kontruksi dari Graf Kincir Angin Belanda

Berikut diberikan definisi, notasi simpul dan kontruksi dari graf kincir angin belanda $C_4^{(k)}$ dengan $k \ge 1$, selanjutnya didefinisikan himpunan simpul dan himpunan busur dari graf kincir angin belanda $C_4^{(k)}$ dengan $k \ge 1$.

Definisi 1. *[3] Graf kincir angin belanda $C_4^{(k)}$ dengan $k \ge 1$ adalah graf yang dibentuk dari k graf lingkaran C_4 yang mempunyai satu simpul pusat persekutuan v_0.*

Notasi simpul dan kontruksi dari graf kincir angin belanda dengan diberikan pada Gambar 1 sebagai berikut :



Gambar 1. Notasi simpul dan kontruksi dari graf kincir angin belanda $C_4^{(k)}$ dengan $k \ge 1$.

Berdasarkan notasi simpul dan kontruksi pada Gambar 1 didefinisikan himpunan simpul dan himpunan busur dari graf kincir angin belanda $C_4^{(k)}$ dengan $k \geq 1$ adalah

$V\left(C_4^{(k)}\right) = \{u_0\} \cup \{v_i^j \mid 1 \leq i \leq k, j = 1,2\} \cup \{u_i \mid 1 \leq i \leq k\}$ dan

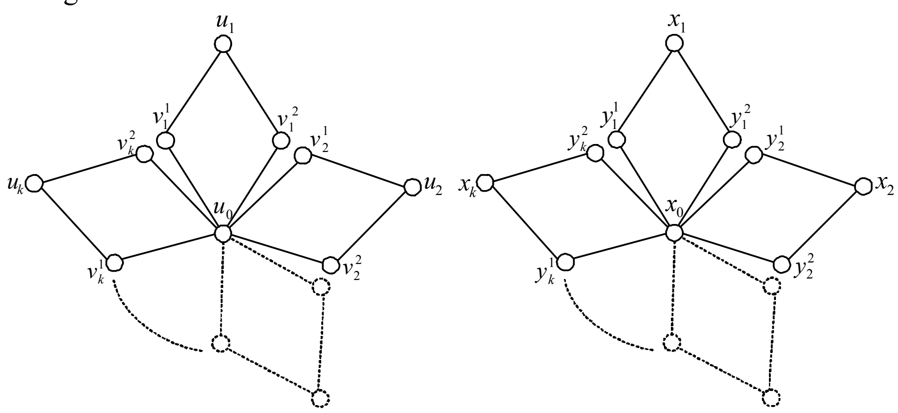
$E\left(C_4^{(k)}\right) = \{u_0 v_i^j \mid 1 \leq i \leq k, j = 1,2\} \cup \{v_i^j u_i \mid 1 \leq i \leq k, j = 1,2\}$.

2. Definisi dan Kontruksi dari Gabungan Graf Kincir Angin Belanda

Berikut diberikan definisi, notasi simpul dan kontruksi dari gabungan graf kincir angin belanda $C_4^{(k)} \cup C_4^{(k)}$ dengan $k \geq 1$, selanjutnya didefinisikan himpunan simpul dan himpunan busur dari gabungan graf kincir angin belanda $C_4^{(k)} \cup C_4^{(k)}$ dengan $k \geq 1$.

Definisi 2. *Graf $C_4^{(k)} \cup C_4^{(k)}$ dengan $k \geq 1$ adalah gabungan dua graf kincir angin belanda $C_4^{(k)}$ dengan $k \geq 1$.*

Notasi simpul dan kontruksi dari gabungan graf kincir angin belanda $C_4^{(k)} \cup C_4^{(k)}$ dengan $k \geq 1$ diberikan pada Gambar 2 sebagai berikut :



$$C_4^{(k)} \cup C_4^{(k)}$$

Gambar 2. Notasi simpul dan kontruksi dari gabungan graf kincir angin belanda $C_4^{(k)} \cup C_4^{(k)}$ dengan $k \geq 1$.

Berdasarkan notasi simpul dan kontruksi pada Gambar 2 didefinisikan himpunan simpul dan himpunan busur dari gabungan graf kincir angin berlanda $C_4^{(k)} \cup C_4^{(k)}$ dengan $k \geq 1$ adalah

$$V\left(C_4^{(k)} \cup C_4^{k}\right) = \{u_0\} \cup \{v_i^j \mid 1 \leq i \leq k, j = 1,2\} \cup \{u_i \mid 1 \leq i \leq k\}$$

$$\cup \{x_0\} \cup \{y_i^j \mid 1 \leq i \leq k, j = 1,2\} \cup \{x_i \mid 1 \leq i \leq k\} \text{ dan}$$

$$E\left(C_4^{(k)} \cup C_4^{(k)}\right) = \{u_0 v_i^j \mid 1 \leq i \leq k, j = 1,2\} \cup \{v_i^j u_i \mid 1 \leq i \leq k, j = 1,2\}$$

$$\cup \{x_0 y_i^j \mid 1 \leq i \leq k, j = 1,2\} \cup \{y_i^j x_i \mid 1 \leq i \leq k, j = 1,2\}.$$

ISSN 0215-9511

3. Pelabelan Harmonis Ganjil pada Graf Gincir Angin Belanda

Berikut diberikan sifat yang menyatakan bahwa graf kincir angin belanda $C_4^{(k)}$ dengan $k \geq 1$ memenuhi fungsi pelabelan harmonis ganjil sedemikian sehingga graf kincir angin belanda $C_4^{(k)}$ dengan $k \geq 1$ adalah graf harmonis ganjil, selanjutnya diberikan beberapa contoh untuk memperjelas sifat tersebut.

Teorema 1. *Graf kincir angin belanda* $C_4^{(k)}$ *dengan* $k \geq 1$ *adalah graf harmonis ganjil.*

Bukti. Misalkan $C_4^{(k)}$ adalah graf kincir angin belanda dengan $k \geq 1$.

Himpunan simpul dan himpunan busur dari $C_4^{(k)}$ dengan $k \geq 1$ adalah

$V(C_4^{(k)}) = \{u_0\} \cup \{v_i^j | 1 \leq i \leq k, j = 1,2\} \cup \{u_i | 1 \leq i \leq k\}$ dan

$E(C_4^{(k)}) = \{u_0 v_i^j | 1 \leq i \leq k, j = 1,2\} \cup \{v_i^j u_i | 1 \leq i \leq k, j = 1,2\}$.

maka $p = |V(C_4^{(k)})| = 3k + 1$ dan

$q = |E(C_4^{(k)})| = 4k$.

Definisikan fungsi pelabelan simpul

$f : V(C_4^{(k)}) \to \{0,1,2,3,...,8k-1\}$ sebagai berikut :

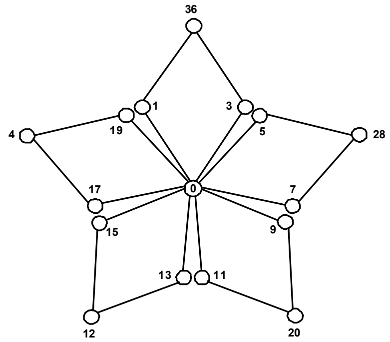
$$f(u_0) = 0$$
$$f(v_i^j) = 4i + 2j - 5, 1 \leq i \leq k, j = 1,2$$
$$f(u_i) = 8k - 8i + 4, 1 \leq i \leq k$$

Fungsi pelabelan f akan menginduksi pelabelan $f^* : E(C_4^{(k)}) \to \{1,3,5,7,...,8k-1\}$ yang didefinisikan oleh $f^*(uv) = f(u) + f(v)$, sehingga didapatkan fungsi pelabelan busur sebagai berikut :

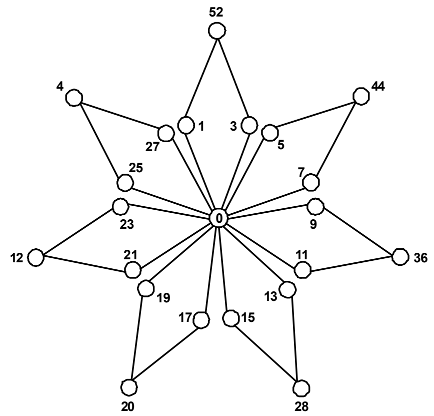
$$f^*(u_0 v_i^j) = 4i + 2j - 5, 1 \leq i \leq k, j = 1,2$$
$$f^*(v_i^j u_i) = 8k - 4i + 2j - 1, 1 \leq i \leq k, j = 1,2$$

Dapat ditunjukkan bahwa fungsi f memenuhi pemetaan injektif sedemikian sehingga menginduksi fungsi f^* yang bijektif. Akibatnya graf kincir angin belanda $C_4^{(k)}$ dengan $k \geq 1$ adalah graf harmonis ganjil ■

Contoh 1. Diberikan contoh pelabelan harmonis ganjil dari graf kincir angin belanda $C_4^{(5)}$ pada Gambar 3 dan graf kincir angin belanda $C_4^{(7)}$ pada Gambar 4.



Gambar 3. Pelabelan harmonis ganjil pada graf kincir angin belanda $C_4^{(5)}$.



Gambar 4. Pelabelan harmonis ganjil pada graf kincir angin belanda $C_4^{(7)}$.

4. Pelabelan Harmonis Ganjil pada Gabungan Graf Kincir Angin Belanda

Berikut diberikan sifat yang menyatakan bahwa gabungan graf kincir angin belanda $C_4^{(k)} \cup C_4^{(k)}$ dengan $k \geq 1$ memenuhi fungsi pelabelan harmonis ganjil sedemikian sehingga gabungan graf kincir angin belanda $C_4^{(k)} \cup C_4^{(k)}$ dengan $k \geq 1$ adalah graf harmonis ganjil, selanjutnya diberikan beberapa contoh untuk memperjelas sifat tersebut.

Teorema 2. *Gabungan graf kincir angin belanda* $C_4^{(k)} \cup C_4^{(k)}$ *dengan* $k \geq 1$ *adalah graf harmonis ganjil.*

Bukti. Misalkan $C_4^{(k)} \cup C_4^{(k)}$ adalah gabungan graf kincir angin belanda dengan $k \geq 1$. Himpunan simpul dan himpunan busur dari $C_4^{(k)} \cup C_4^{(k)}$ dengan $k \geq 1$ adalah

$$V\left(C_4^{(k)} \cup C_4^{k}\right) = \{u_0\} \cup \left\{v_i^j \middle| 1 \leq i \leq k, j = 1{,}2\right\} \cup \{u_i | 1 \leq i \leq k\}$$

$$\cup \{x_0\} \cup \left\{y_i^j \middle| 1 \leq i \leq k, j = 1{,}2\right\} \cup \{x_i | 1 \leq i \leq k\} \text{ dan}$$

$$E\left(C_4^{(k)} \cup C_4^{(k)}\right) = \left\{u_0 v_i^j \middle| 1 \leq i \leq k, j = 1{,}2\right\} \cup \left\{v_i^j u_i \middle| 1 \leq i \leq k, j = 1{,}2\right\}$$

$$\cup \left\{x_0 y_i^j \middle| 1 \leq i \leq k, j = 1{,}2\right\} \cup \left\{y_i^j x_i \middle| 1 \leq i \leq k, j = 1{,}2\right\}.$$

maka $p = \left|V\left(C_4^{(k)} \cup C_4^{(k)}\right)\right| = 6k + 2$ dan $q = \left|V\left(C_4^{(k)} \cup C_4^{(k)}\right)\right| = 8k$.

Definisikan fungsi pelabelan simpul $f : V\left(C_4^{(k)} \cup C_4^{(k)}\right) \rightarrow \{0,1,2,3,...,16k-1\}$ sebagai berikut :

$$f(u_0) = 0$$

$$f\left(v_i^j\right) = 4i + 2j - 5, 1 \leq i \leq k, j = 1{,}2$$

$$f(u_i) = 8k - 8i + 4, 1 \leq i \leq k$$

$$f(x_0) = 2$$

$$f\left(y_i^j\right) = 8k + 4i + 2j - 7, 1 \leq i \leq k, j = 1{,}2$$

$$f(x_i) = 8k - 8i + 6, 1 \leq i \leq k$$

Fungsi pelabelan f akan menginduksi pelabelan $f^* : E\left(C_4^{(k)} \cup C_4^{(k)}\right) \rightarrow \{1,3,5,7,...,16k-1\}$ yang didefinisikan oleh $f^*(uv) = f(u) + f(v)$, sehingga didapatkan fungsi pelabelan busur sebagai berikut :

$$f^*\left(u_0 v_i^j\right) = 4i + 2j - 5, 1 \leq i \leq k, j = 1{,}2$$

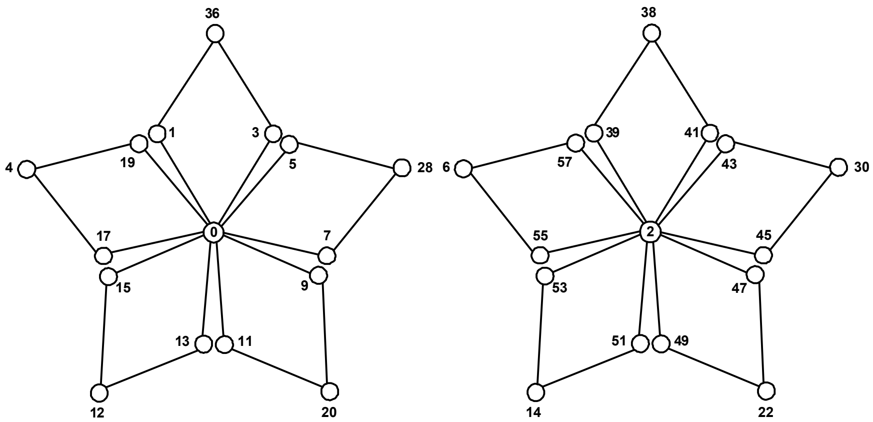
$$f^*\left(v_i^j u_i\right) = 8k - 4i + 2j - 1, 1 \leq i \leq k, j = 1{,}2$$

$$f^*\left(x_0 y_i^j\right) = 8k + 4i + 2j - 5, 1 \leq i \leq k, j = 1{,}2$$

$$f^*\left(y_i^j x_i\right) = 16k - 4i + 2j - 1, 1 \leq i \leq k, j = 1{,}2$$

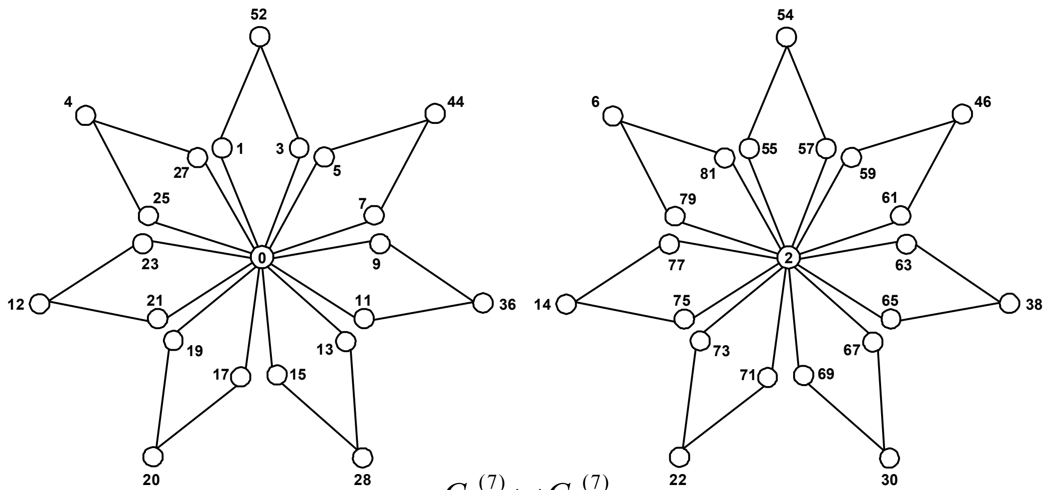
Dapat ditunjukkan bahwa fungsi f memenuhi pemetaan injektif sedemikian sehingga menginduksi fungsi f^* yang bijektif. Akibatnya gabungan graf kincir angin belanda $C_4^{(k)} \cup C_4^{(k)}$ dengan $k \geq 1$ adalah graf harmonis ganjil ■

Contoh 2. Diberikan contoh pelabelan harmonis ganjil dari gabungan graf kincir angin belanda $C_4^{(5)} \cup C_4^{(5)}$ pada Gambar 5 dan gabungan graf kincir angin belanda $C_4^{(7)} \cup C_4^{(7)}$ pada Gambar 6.



$C_4^{(5)} \cup C_4^{(5)}$

Gambar 5. Pelabelan harmonis ganjil pada gabungan graf kincir angin belanda $C_4^{(5)} \cup C_4^{(5)}$.



$C_4^{(7)} \cup C_4^{(7)}$

Gambar 6. Pelabelan harmonis ganjil pada gabungan graf kincir angin belanda $C_4^{(7)} \cup C_4^{(7)}$.

ISSN 0215-9511

SIMPULAN

Pada makalah ini telah dikonstruksikan pelabelan harmonis ganjil pada graf kincir angin belanda $C_4^{(k)}$ dengan $k \geq 1$ dan gabungan graf kincir angin belanda $C_4^{(k)} \cup C_4^{(k)}$ dengan $k \geq 1$ sedemikian sehingga graf kincir angin belanda $C_4^{(k)}$ dengan $k \geq 1$ dan gabungan graf kincir angin belanda $C_4^{(k)} \cup C_4^{(k)}$ dengan $k \geq 1$ adalah graf harmonis ganjil. Saat ini penulis sedang memperluas kasus tersebut, sehingga memungkinkan untuk dilakukan penelitian lebih lanjut.

DAFTAR PUSTAKA

Abdel-Aal, M. E. 2014. *News Families of Odd Harmonious Graphs*. IJSCMC, Vol 3, No 1.

Alyani, F., Firmansah, F., Giyarti, W., Sugeng, K. A. 2013. *The Odd Harmonious Labeling of kCn-Snake Graphs for Spesific Values of n, that is, for n = 4 and n = 8*. IICMA, 225-230.

Gallian, J. A. 2014. *Dynamic Survey of Graph Labeling*. Electronic Journal of Combinatorics 17.

Liang, Z., Bai, Z. 2009. *On The Odd Harmonious Graphs with Applications*. J. Appl. Math. Comput., 29, 105-116.

Saputri, G. A., Sugeng, K. A., Froncek, D. 2013. *The Odd Harmonious Labeling of Dumbbell and Generalized Prims Graphs*. AKCE Int, J. Graphs Comb., Vol 10, No 2, 221-228.

Vaidya, S. K., Shah, N.H. 2011. *Some New Odd Harmonious Graphs.* IJMSC, Vol 1, No 1, 9-16.

ISSN 0215-9511

View publication stats